Sección 0.7
Desigualdades

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

1. Desigualdades lineales
2. Desigualdades simultáneas
3. Desigualdades no lineales
4. Desigualdades con valor absoluto

Desigualdades

Una *desigualdad* es una expresión matemática que usa alguno de los siguientes símbolos de relación de orden:

$<$ "menor que"

$\leq$ "menor o igual que"

$>$ "mayor que"

$\geq$ "mayor o igual que"

Ejemplo

Las siguientes son desigualdades en la variable x.

(a) $2x - 5 \leq 10$

(b) $x^2 - 2x > 6$

(c) $\dfrac{x-4}{x+6} \geq 0$

(d) $|5x - 2| < 8$

Resolver una desigualdad

Resolver una desigualdad significa encontrar todos los valores de la variable que hacen la desigualdad cierta.

Cuando se resuelve una desigualdad se usan las siguientes reglas para dejar la variable sola a un lado del signo de desigualdad. Estas reglas producen una desigualdad equivalente.

Propiedades de las desigualdades

Se presentan las reglas para desigualdades que envuelven el símbolo $\leq$, pero aplican para cualquier símbolo de desigualdad.

D1. $A \leq B \Leftrightarrow A + C \leq B + C$

D2. $A \leq B \Leftrightarrow A - C \leq B - C$

D3. Si $C > 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow CA \leq CB$

D4. Si $C < 0$, entonces $A \leq B \Leftrightarrow CA \geq CB$

Desigualdades lineales

Una desigualdad en una variable es *lineal* si se puede expresar de forma tal que cada término sea constante o un múltiplo constante de la variable.

Ejemplos de desigualdades lineales:

(a) $5x \leq 3$

(b) $3x - 7 > 2(4 - 7x)$

Ejemplos de desigualdades NO lineales:

(a) $x(1 - x) < 5$

(b) $\dfrac{x - 4}{1 - 3x} \geq 0$

Ejemplo

Resuelva la desigualdad lineal:

$$3 - (x + 8) > 4 - 3x$$

Desigualdades simultáneas

Una desigualdad *simultánea* o *doble* es la conjunción de dos desigualdades simples: $A < B$ y $B < C$, que se puede expresar como $A < B < C$, de forma tal que la variable o incógnita aparece solamente en el término del medio.

Ejemplos:

(a) $-3 < 4x + 2 \leq 13$

(b) $5 \leq \dfrac{1 - x}{2} \leq 10$

Ejemplo

Resuelva la desigualdad simultánea:

$$-2 < \frac{3}{4}x - 5 \leq 16$$

Si la variable x está acompañada de un signo negativo, se debe multiplicar toda la expresión por -1. Esto hace que los signos de la desigualdad cambien al igual que el sentido de las desigualdades.

Ejemplo

Resuelva la desigualdad simultánea:

$$-3 \leq 6 - 3x < -1$$

Desigualdades no lineales

En algunas situaciones se pueden resolver desigualdades cuadráticas y otras potencias de la variable usando factorización y la siguiente observación.

El signo de un producto o cociente

1. Si una expresión escrita como producto o cociente tiene una cantidad **par** de **factores negativos**, entonces su valor es **positivo**.
2. Si una expresión escrita como producto o cociente tiene una cantidad **impar** de **factores negativos**, entonces su valor es **negativo**.

Pasos para resolver algunas desigualdades no lineales

1. **Mover todos los términos a un lado**. Si el lado de la desigualdad que es distinto de cero envuelve cocientes, halle el mínimo común denominador.
2. **Factorizar** el lado de la desigualdad que es distinto de cero.
3. **Encontrar los intervalos**. Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividen la recta en intervalos.
4. **Hacer una tabla o un diagrama**. Use valores de prueba para construir un diagrama de signos de cada factor en cada intervalo. Determine el signo del producto o cociente y colóquelo en la última fila del diagrama.
5. **Resolver**. Determine la solución de la desigualdad de la última fila del diagrama.

Ejemplos

(a) Resuelva la desigualdad cuadrática:

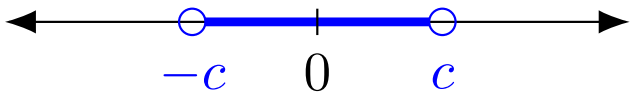
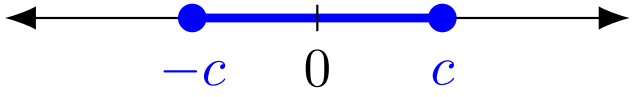
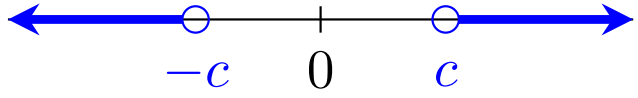
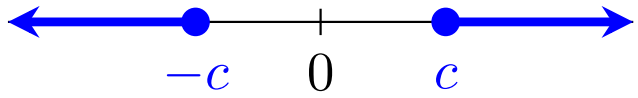
$$2x^2 < 5x + 3$$

(b) Resuelva la desigualdad racional:

$$\frac{2x-3}{x+5} \leq 1$$

Desigualdades con valor absoluto

Se usan las siguientes propiedades para resolver este tipo de desigualdades.
Si $c > 0$, entonces:

Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
$\lvert x \rvert < c$	$-c < x < c$	
$\lvert x \rvert \leq c$	$-c \leq x \leq c$	
$\lvert x \rvert > c$	$x > c$ o $x < -c$	
$\lvert x \rvert \geq c$	$x \geq c$ o $x \leq -c$	

Ejemplos

Resuelva las siguientes desigualdades con valor absoluto.

(a) $|8 - 2x| < 3$

(b) $|2x + 1| \geq 9$